

Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Onbekende zijde

1 maximumscore 4

- Cosinusregel in driehoek ABM geeft
 $5^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(\angle ABM)$ 1
- Hieruit volgt $\cos(\angle ABM) = \frac{9}{16}$ (dus $\cos(\angle ABC) = \frac{9}{16}$) (dus
 $\angle ABC = 55,77\dots(^{\circ})$) 1
- Cosinusregel in driehoek ABC geeft
 $AC^2 = 4^2 + 12^2 - 2 \cdot 4 \cdot 12 \cdot \frac{9}{16}$ 1
- Dit geeft $AC^2 = 106$, dus $AC \approx 10,3$ 1

of

- Cosinusregel in driehoek ABM geeft
 $4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(\angle AMB)$ 1
- Hieruit volgt $\cos(\angle AMB) = \frac{3}{4}$ (dus $\angle AMB = 41,40\dots(^{\circ})$) 1
- $\cos(\angle AMC) = (-\cos(\angle AMB)) = -\frac{3}{4}$
(of $\angle AMC = (180 - \angle AMB) = 138,59\dots(^{\circ})$, dus $\cos(\angle AMC) = -\frac{3}{4}$) 1
- Cosinusregel in driehoek AMC geeft
 $AC^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot -\frac{3}{4} = 106$, dus $AC \approx 10,3$ 1

of

- Er geldt $t^2 + u^2 = 4^2$ (met P de loodrechte projectie van A op MB ,
 $t = AP$ en $u = BP$) 1
- Ook geldt $t^2 + (6 - u)^2 = 5^2$ 1
- Algebraïsch oplossen van dit stelsel geeft $t = 3,30\dots$, $u = 2,25$
(de oplossing $t = -3,30\dots$, $u = 2,25$ voldoet niet) 1
- Omdat $AC^2 = t^2 + (12 - u)^2$, volgt $AC^2 = 106$, dus $AC \approx 10,3$ 1

Spookje

2 maximumscore 6

- $\frac{d}{dx} \cos(2x) = -2 \sin(2x)$ 1
- $f'(x) = \cos(x) \cos(2x) - 2 \sin(x) \sin(2x)$ 1
- $\cos(x) \cos(2x) = \cos(x)(2 \cos^2(x) - 1) = 2 \cos^3(x) - \cos(x)$ 1
- $2 \sin(x) \sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot 2 \sin(x) \cos(x) = 4 \sin^2(x) \cos(x)$ 1
- $4 \sin^2(x) \cos(x) = 4 \cos(x)(1 - \cos^2(x))$ 1
- $2 \cos^3(x) - \cos(x) - 4 \cos(x)(1 - \cos^2(x))$ herleiden tot $6 \cos^3(x) - 5 \cos(x)$ 1

3 maximumscore 6

- Voor p moet gelden $f'(p) \cdot g'(p) = -1$ 1
- $(6 \cos^3(p) - 5 \cos(p)) \cdot \cos(p) = -1$ geeft $6 \cos^4(p) - 5 \cos^2(p) + 1 = 0$ 1
- De vergelijking $6q^2 - 5q + 1 = 0$ (met $q = \cos^2(p)$) moet worden opgelost 1
- Dit geeft $q = \frac{1}{3}$ of $q = \frac{1}{2}$ 1
- Hieruit volgt $\cos(p) = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ of $\cos(p) = \sqrt{\frac{1}{3}}$ of $\cos(p) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ of $\cos(p) = \sqrt{\frac{1}{2}}$ 1
- Elk van deze vergelijkingen heeft 2 oplossingen (die allemaal verschillen), dus het gevraagde aantal is 8 1

4 maximumscore 3

- De keuze $t = 2x$ en $u = x$ 1
 - $\sin(2x+x) - \sin(2x-x) = \sin(2x) \cos(x) + \cos(2x) \sin(x) - \sin(2x) \cos(x) + \cos(2x) \sin(x)$ 1
 - Dit is gelijk aan $2 \cos(2x) \sin(x)$, dus $\frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x)) = \sin(x) \cos(2x)$ 1
- of
- $\sin(3x) - \sin(x) = \sin(2x+x) - \sin(x) = \sin(2x) \cos(x) + \cos(2x) \sin(x) - \sin(x)$ 1
 - Dit is gelijk aan $2 \sin(x) \cos^2(x) + \cos(2x) \sin(x) - \sin(x) = \sin(x)(2 \cos^2(x) + \cos(2x) - 1) = \sin(x)(\cos(2x) + \cos(2x))$ 1
 - Dit is gelijk aan $\sin(x) \cdot 2 \cos(2x)$, dus $\frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x)) = \sin(x) \cos(2x)$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

5 maximumscore 4

- De oppervlakte van V is gelijk aan $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \left(2 + \sin(x) - \frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x))\right) dx$ 1
- Een primitieve van $\frac{1}{2}\sin(3x)$ is $-\frac{1}{6}\cos(3x)$ 1
- Een primitieve van $2 + \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$ is $2x - \cos(x) - \frac{1}{2}\cos(x)$ 1
- Invullen van de grenzen geeft: de oppervlakte is 4π 1

of

- De oppervlakte van V is gelijk aan $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \left(2 + \sin(x) - \frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x))\right) dx$ 1
- Een primitieve van $2 + \sin(x)$ is $2x - \cos(x)$ 1
- Een primitieve van $\frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x))$ is $-\frac{1}{6}\cos(3x) + \frac{1}{2}\cos(x)$ 1
- Invullen van de grenzen geeft: de oppervlakte is 4π 1

Hoogwater

6 maximumscore 5

- De vergelijking $12\,000 = 5734 - 1648 \ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)$ moet worden opgelost 1
- $\ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right) = \frac{12\,000 - 5734}{-1648} (= -3,802\dots)$ 1
- $\ln\left(\frac{T}{T-1}\right) = e^{-3,802\dots} (= 0,022\dots)$ 1
- $\frac{T}{T-1} = e^{0,022\dots} = 1,022\dots$, dus $T = 1,022\dots \cdot (T-1)$ 1
- Dit geeft $T = \frac{1,022\dots}{(1,022\dots - 1)} = 45,3\dots$, dus de gevraagde herhalingsstijd is 45 (of 46) (jaar) 1

7 maximumscore 5

- $\frac{dC}{dT} = \frac{-b}{\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)} \cdot \frac{d}{dT} \ln\left(\frac{T}{T-1}\right)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2
 - $\frac{d}{dT} \ln\left(\frac{T}{T-1}\right) = \frac{1}{\frac{T}{T-1}} \cdot \frac{d}{dT} \frac{T}{T-1}$ 1
 - $\frac{d}{dT} \frac{T}{T-1} = \frac{1 \cdot (T-1) - 1 \cdot T}{(T-1)^2} = \frac{-1}{(T-1)^2}$ 1
 - $\frac{dC}{dT} = \frac{-b}{\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)} \cdot \frac{1}{\frac{T}{T-1}} \cdot \frac{-1}{(T-1)^2}$ geeft $\frac{dC}{dT} = \frac{b}{T \cdot (T-1) \cdot \ln\left(\frac{T}{T-1}\right)}$ 1
- of
- $C = a - b \ln(\ln(T) - \ln(T-1))$ 1
 - $\frac{dC}{dT} = \frac{-b}{\ln(T) - \ln(T-1)} \cdot \frac{d}{dT} (\ln(T) - \ln(T-1))$ 1
 - $\frac{d}{dT} (\ln(T) - \ln(T-1)) = \frac{1}{T} - \frac{1}{T-1}$ 1
 - $\frac{1}{T} - \frac{1}{T-1} = \frac{T-1}{T(T-1)} - \frac{T}{T(T-1)} = \frac{-1}{T(T-1)}$ 1
 - $\frac{dC}{dT} = \frac{-b}{\ln(T) - \ln(T-1)} \cdot \frac{-1}{T(T-1)} = \frac{b}{T \cdot (T-1) \cdot \ln\left(\frac{T}{T-1}\right)}$ 1

Opmerking

In het eerste antwoordalternatief mogen voor het eerste antwoordelement uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

8 maximumscore 5

- Er moet gelden: $\frac{dC}{dT} > 0$ 1
- (Omdat $T > 1$ geldt) $T > 0$ en $T - 1 > 0$ 1
- Omdat (ook) $T > T - 1$, geldt $\frac{T}{T - 1} > 1$ 1
- (Omdat $y = \ln(x)$ stijgend is en $\ln(1) = 0$ volgt hieruit dat) $\ln\left(\frac{T}{T - 1}\right) > 0$ 1
- Zowel $b > 0$ als $T \cdot (T - 1) \cdot \ln\left(\frac{T}{T - 1}\right) > 0$ (dus $\frac{dC}{dT} > 0$, dus de grafiek van C is stijgend) 1

of

- Er moet gelden: $\frac{dC}{dT} > 0$ 1
- (Omdat $T > 1$ geldt) $T > 0$ en $T - 1 > 0$ 1
- $\ln\left(\frac{T}{T - 1}\right) = \ln(T) - \ln(T - 1)$ 1
- (Omdat $y = \ln(x)$ stijgend is en $T > T - 1$, geldt) $\ln(T) > \ln(T - 1)$, dus $\ln\left(\frac{T}{T - 1}\right) > 0$ 1
- Zowel $b > 0$ als $T \cdot (T - 1) \cdot \ln\left(\frac{T}{T - 1}\right) > 0$ (dus $\frac{dC}{dT} > 0$, dus de grafiek van C is stijgend) 1

9 maximumscore 4

- Invullen geeft het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} 1700 = a - b \cdot -1,24... \\ 2100 = a - b \cdot -2,25... \end{cases}$ 1
- Beschrijven hoe dit stelsel kan worden opgelost 1
- Hieruit volgt $b = 398,22...$ en $a = 1203,85...$ 1
- Dit geeft $C = 1203,85... - 398,22... \cdot \ln\left(\ln\left(\frac{100}{100 - 1}\right)\right) \approx 3036$ (of 3035) (m^3/s) 1

Twee halve cirkels

10 maximumscore 7

- De vergelijking van c_1 herleiden tot $(x+6)^2 + y^2 = 4$ 1
 - $M_1(-6, 0)$ en de straal van c_1 is 2 1
 - $PM_1 = \sqrt{6^2 + OP^2}$ en $PM_2 = \sqrt{5^2 + OP^2}$ 1
 - $d(P, c_1) = \sqrt{6^2 + OP^2} - 2$ en $d(P, c_2) = \sqrt{5^2 + OP^2} - 5$ 1
 - De vergelijking $\sqrt{6^2 + OP^2} - 2 = 2 \cdot (\sqrt{5^2 + OP^2} - 5)$ moet worden opgelost 1
 - Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
 - Dit geeft $OP \approx 7,02$ (dus de gevraagde y -coördinaat van P is 7,02) 1
- of
- Voor snijpunten van c_1 en de x -as geldt $x^2 + 12x = -32$, dus $x^2 + 12x + 32 = 0$, dus $(x+4)(x+8) = 0$, dus $x = -4$ of $x = -8$ 1
 - (Omdat c_1 een halve cirkel is met $y \geq 0$ volgt dat de diameter 4 is, dus) $M_1(-6, 0)$ en de straal van c_1 is 2 1
 - Als $a = d(P, c_2)$, dan geldt $d(P, c_1) = 2a$, dus $M_2P = 5 + a$ en $M_1P = 2 + 2a$ 1
 - Er geldt $OP^2 = M_1P^2 - M_1O^2 = (2 + 2a)^2 - 6^2$ en $OP^2 = M_2P^2 - M_2O^2 = (5 + a)^2 - 5^2$ 1
 - Dus $(2 + 2a)^2 - 6^2 = (5 + a)^2 - 5^2$ 1
 - Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
 - Dit geeft $a = 3,61\dots$; invullen in een van de formules voor OP geeft $OP \approx 7,02$ (dus de gevraagde y -coördinaat van P is 7,02) 1

Twee bewegende punten

11 maximumscore 5

- Voor P_1 geldt $x'(t) = 2t + 2$ en $y'(t) = 4$ 1
- $v_1(t) = \sqrt{(2t+2)^2 + 4^2}$ 1
- Uit $\sqrt{(2t+2)^2 + 4^2} = 4\sqrt{t^2+1}$ volgt $(2t+2)^2 + 4^2 = 16(t^2+1)$ 1
- Herleiden tot $12t^2 - 8t - 4 = 0$ (of $3t^2 - 2t - 1 = 0$) 1
- Dit geeft $t = 1$ ($t = -\frac{1}{3}$ voldoet niet) 1

12 maximumscore 3

- De richtingscoëfficiënt van de lijn door P_1 en P_2 is
$$\frac{2t^2 - 4t}{4t - (t^2 + 2t)}$$
 1
- Dit is gelijk aan $\frac{2t^2 - 4t}{2t - t^2}$ 1
- Dit is gelijk aan $\frac{-2(-t^2 + 2t)}{2t - t^2}$ en dat is gelijk aan -2 1

of

- Een richtingsvector van de lijn door P_1 en P_2 is $\begin{pmatrix} 4t - (t^2 + 2t) \\ 2t^2 - 4t \end{pmatrix}$ 1
- Dit is gelijk aan $\begin{pmatrix} 2t - t^2 \\ 2t^2 - 4t \end{pmatrix}$ 1
- Dit is gelijk aan $\begin{pmatrix} 2t - t^2 \\ -2(2t - t^2) \end{pmatrix}$, dus $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ is een richtingsvector, dus de richtingscoëfficiënt is -2 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

13 maximumscore 4

- Een vergelijking van l is van de vorm $y = -2x + b$ 1
- Substitutie van bijvoorbeeld $(4t, 2t^2)$ geeft $b = 2t^2 + 8t$ 1
- $(3, 0)$ moet op l liggen, dus moet gelden $0 = -6 + 2t^2 + 8t$ 1
- Exact oplossen geeft $t = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2}$, dus het gevraagde tijdstip is

$$t = \frac{-4 + \sqrt{28}}{2} \text{ (of een gelijkwaardige uitdrukking)}$$

$$(t = \frac{-4 - \sqrt{28}}{2} \text{ voldoet niet}) \quad \text{1}$$

Een derdegraadsfunctie

14 maximumscore 3

- (Voor een punt (x, y) op de grafiek van f ligt punt (y, x) op de grafiek van de inverse van f , dus er geldt $x = -2 + \sqrt[3]{y-1}$ 1
- Dus $x+2 = \sqrt[3]{y-1}$, dus $(x+2)^3 = y-1$, dus $y = (x+2)^3 + 1$ 1
- Dit is gelijk aan
 $(x+2)^2 \cdot (x+2) + 1 = (x^2 + 4x + 4) \cdot (x+2) + 1 = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$
 $(= f(x), \text{ dus geldt inderdaad } f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1})$ 1

of

- (Voor een punt (x, y) op de grafiek van de inverse van f ligt punt (y, x) op de grafiek van f , dus er geldt $x = y^3 + 6y^2 + 12y + 9$ 1
- $(y+2)^3 = (y+2)^2(y+2) = (y^2 + 4y + 4)(y+2) = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$,
dus $x = (y+2)^3 + 1$ 1
- Herleiden geeft $y = -2 + \sqrt[3]{x-1}$ (dus geldt inderdaad
 $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$) 1

of

- $f(f^{\text{inv}}(x)) = (-2 + \sqrt[3]{x-1})^3 + 6 \cdot (-2 + \sqrt[3]{x-1})^2 + 12 \cdot (-2 + \sqrt[3]{x-1}) + 9$ 1
- $(-2 + \sqrt[3]{x-1})^3 = -8 + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{x-1} + 3 \cdot (-2) \cdot (\sqrt[3]{x-1})^2 + x - 1$ 1
- De rest van de herleiding van $f(f^{\text{inv}}(x))$ tot x (dus geldt inderdaad
 $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$) 1

15 maximumscore 3

- De ondergrens van de integraal is 0, de bovengrens is $f(0) = 9$ 1
- De inhoud van het omwentelingslichaam is gelijk aan
 $\pi \cdot \int_0^9 (-2 + \sqrt[3]{x-1})^2 dx$ 1
- De inhoud is 33,9 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

16 maximumscore 6

- $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$ 1
- Voor P geldt $3x^2 + 12x + 12 = 0$; dit geeft $(x+2)^2 = 0$, dus $x = -2$ 1
- Voor Q geldt (vanwege de symmetrie in de lijn met vergelijking $y = x$)
 $y = -2$ 1
- ($f(-2) = 1$, dus) $P(-2, 1)$ en $Q(1, -2)$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door P en Q is $(\frac{-2-1}{1-(-2)}) = -1$ 1
- De y -coördinaat van S is dus $1 + 2 \cdot -1 = -1$ 1

of

- $f^{\text{inv}'}(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}$ 1
- (Als $x \rightarrow 1$, dan $f^{\text{inv}'}(x) \rightarrow \infty$, dus) de grafiek van $f^{\text{inv}}(x)$ heeft een verticale raaklijn als $x = 1$ (en dit is dus de x -coördinaat van Q) 1
- Voor P geldt (vanwege de symmetrie in de lijn met vergelijking $y = x$)
 $y = 1$ 1
- ($f^{\text{inv}}(1) = -2$, dus) $Q(1, -2)$ en $P(-2, 1)$ 1
- (Omdat Q het spiegelbeeld is van P in de lijn met vergelijking $y = x$,
geldt) de richtingscoëfficiënt van de lijn door P en Q is -1 1
- De y -coördinaat van S is dus $1 + 2 \cdot -1 = -1$ 1

of

- $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$ 1
- Voor P geldt $3x^2 + 12x + 12 = 0$; dit geeft $(x+2)^2 = 0$, dus $x = -2$ 1
- $f^{\text{inv}'}(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}$ 1
- ($f(-2) = 1$, dus) $P(-2, 1)$ en (als $x \rightarrow 1$, dan $f^{\text{inv}'}(x) \rightarrow \infty$, dus) de
grafiek van $f^{\text{inv}}(x)$ heeft een verticale raaklijn als $x = 1$ (en dit is dus
de x -coördinaat van Q); ($f^{\text{inv}}(1) = -2$, dus) $Q(1, -2)$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door P en Q is $(\frac{-2-1}{1-(-2)}) = -1$ 1
- De y -coördinaat van S is dus $1 + 2 \cdot -1 = -1$ 1